

Chapitre 7

Energie potentielle, énergie mécanique et résonance



7.1 Energie potentielle et énergie mécanique

7.1.1 Energie potentielle

7.1.2 Energie mécanique

7.1.3 Energie et puissance dissipées

7.1.4 Forces conservatives

7.2 Equilibre et stabilité

7.2.1 Position d'équilibre et stabilité

7.2.2 Stabilité du pendule mathématique

7.3 Résonance

7.3.1 Oscillateur harmonique forcé

7.3.2 Régimes transitoire et stationnaire

7.3.3 Réponse harmonique

7.1 Energie potentielle et énergie mécanique

7.1.1 Energie potentielle

7.1.2 Energie mécanique

7.1.3 Energie et puissance dissipées

7.1.4 Forces conservatives

- **Force conservative** : une force \mathbf{F}_c est dite conservative si le travail $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c)$ effectué par cette force est indépendant du chemin suivi $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$ et dépend uniquement de la position initiale \mathbf{r}_1 et de la position finale \mathbf{r}_2 .

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (7.1)$$

- **Travail de la force extérieure conservative** : où \mathbf{r}_0 est une position de référence arbitraire.

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (7.2)$$

- **Travail de la force conservative** : (7.2) remis en forme

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) - \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (7.3)$$

- Le travail de la force conservative \mathbf{F}_c est la différence d'une énergie évaluée en \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 .

- **Energie potentielle** : grandeur scalaire et extensive $V(\mathbf{r})$ définie comme le travail à effectuer en s'opposant à la force conservative \mathbf{F}_c pour déplacer le point matériel de \mathbf{r}_0 à \mathbf{r} ,

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.4)$$

définie à une constante près (choix de \mathbf{r}_0).

- **Travail d'une force conservative** :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) - \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (7.3)$$

- **Travail d'une force conservative** : (7.4) dans (7.3)

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \equiv V_1 - V_2 = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} \quad (7.5)$$

- **Unité de l'énergie potentielle (SI)** :

$$[\text{J}] = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$$

William Rankine

1820 – 1872



- **Travail infinitésimal d'une force conservative :**

$$\delta W (\mathbf{F}_c) = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (6.54)$$

- **Travail d'une force conservative :** \mathbf{F}_c sur un chemin fermé \mathcal{C} de \mathbf{r}_1 à $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$,

$$W_{\mathcal{C}} (\mathbf{F}_c) = \oint \delta W (\mathbf{F}_c) = \oint \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7.6)$$

- **Théorème d'existence de l'énergie potentielle :** la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une énergie potentielle $V(\mathbf{r})$ associée à une force \mathbf{F} , c'est-à-dire pour que la force \mathbf{F} soit conservative, est que le travail effectué par la force $W_{\mathcal{C}}(\mathbf{F})$ sur tout chemin fermé \mathcal{C} soit nul,

$$W_{\mathcal{C}}(\mathbf{F}) = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_c \quad (7.7)$$

- **Energie potentielle totale** : (7.8)

$$V = \sum V(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) \quad \text{où} \quad V(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}_c^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}'$$

- **Energie mécanique** : grandeur scalaire et extensive E qui est la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle totale V

$$E = T + V \quad (7.9)$$

- **Propriétés** :

- 1 Une force extérieure conservative $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$ ne modifie pas l'énergie mécanique E d'un point matériel. Elle transforme l'énergie potentielle V en énergie cinétique T et vice versa.
- 2 L'énergie mécanique E est définie à une constante près, car on peut choisir librement la référence de potentiel r_0 .

James Joule

1818 – 1889



- **Unité (SI)** :

$$[\text{J}] = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$$

- **Théorème de l'énergie cinétique** : forces extérieures conservatives

$$\sum W_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad (6.58)$$

- **Travaux** : forces extérieures conservatives (7.5)

$$\sum W_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (7.10)$$

- **Identification des travaux** : (6.58) et (7.10)

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \quad \text{ainsi} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (7.11)$$

- **Energie mécanique** :

$$E_1 = T_1 + V_1 \quad \text{et} \quad E_2 = T_2 + V_2 \quad (7.12)$$

- **Théorème de conservation de l'énergie** : si toutes les forces extérieures agissant sur un point matériel sont des forces conservatives $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$, alors l'énergie mécanique E est conservée, ce qui implique que l'énergie mécanique E_1 au temps t_1 est égale à l'énergie mécanique E_2 au temps t_2 et que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique \dot{E} est nulle

$$E_1 = E_2 = E = \text{cste} \quad \forall t_1, t_2 \quad \text{ainsi} \quad \dot{E} = 0 \quad (7.13)$$

- **Forces extérieures** : conservatives et dissipatives

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}_c^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \quad (7.14)$$

- **Travaux** : forces extérieures de \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_2

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{\text{ext}}) = \sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) + \sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) \quad (7.15)$$

- **Travaux** : forces extérieures conservatives de \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_2

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (7.10)$$

- **Théorème de l'énergie cinétique** : forces extérieures de \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_2

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{\text{ext}}) = \Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad (6.58)$$

- **Travaux** : forces extérieures de \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_2 (6.58) et (7.10)

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} + \sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) \quad (7.16)$$

- **Travaux** : forces extérieures de r_1 à r_2 (7.16) remis en forme

$$\sum W_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{1 \rightarrow 2} \quad (7.17)$$

- **Variation d'énergie mécanique** : de r_1 à r_2 (7.12)

$$\Delta E_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 = T_2 + V_2 - T_1 - V_1 = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{1 \rightarrow 2} \quad (7.18)$$

- **Théorème de l'énergie mécanique** : la somme des travaux des forces dissipatives d'une position initiale r_1 à une position finale r_2 est égale à la variation d'énergie mécanique

$$\sum W_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \Delta E_{1 \rightarrow 2} \quad (7.19)$$

L'énergie mécanique E est dissipée par les forces extérieures dissipatives $\mathbf{F}_d^{\text{ext}}$ (en général des forces de frottement).

- **Théorème de l'énergie mécanique** : infinitésimal

$$dE = \sum \delta W (\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.20)$$

- **Théorème de l'énergie mécanique** : infinitésimal

$$dE = \sum \delta W (\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.20)$$

- **Puissance dissipée** : forces extérieures dissipatives

$$P = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (7.21)$$

- **Puissance dissipée** : dérivée temporelle de l'énergie mécanique

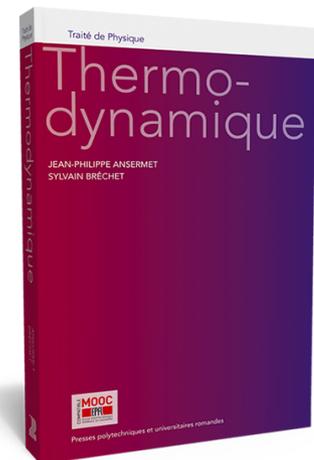
$$P = \frac{dE}{dt} = \dot{E} \quad (7.22)$$

- **Force de frottement visqueux** :

$$\mathbf{F}_d^{\text{ext}} = \mathbf{F}_f = -b\mathbf{v} \quad \text{où } b > 0 \quad (3.3)$$

- **Puissance dissipée** : frottement visqueux

$$P = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = -b\mathbf{v}^2 < 0 \quad (7.23)$$



- **Position et déplacement infinitésimal** : repère cartésien

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \text{ainsi} \quad d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 dx_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (7.24)$$

- **Travail infinitésimal** : force extérieure conservative $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$

$$\delta W (\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = \mathbf{F}_c^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = -dV(\mathbf{r}) = -\left(V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})\right) \quad (7.25)$$

- **Variation infinitésimale d'énergie potentielle** : $V(\mathbf{r}) = V(x_1, x_2, x_3)$

$$dV(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{V(\mathbf{r} + dx_i \hat{\mathbf{x}}_i) - V(\mathbf{r})}{dx_i} \right) dx_i$$

- **Dérivée partielle** : de $V(\mathbf{r})$ par rapport à x_i

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{V(\mathbf{r} + dx_i \hat{\mathbf{x}}_i) - V(\mathbf{r})}{dx_i} \quad (7.27)$$

- **Travail infinitésimal** : force conservative $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$ où $dx_i = \hat{\mathbf{x}}_i \cdot d\mathbf{r}$

$$\delta W (\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = -dV(\mathbf{r}) = -\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}}_i \right) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.28)$$

- **Travail infinitésimal** : force conservative F_c^{ext}

$$\delta W (F_c^{\text{ext}}) = F_c^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{dV}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}}_i \right) \cdot d\mathbf{r} \quad (7.28)$$

- **Opérateur gradient** : dérivée vectorielle spatiale

$$\nabla = \frac{d}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (7.29)$$

- **Gradient d'énergie potentielle** : vecteur

$$\nabla V \equiv \frac{dV}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial V}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (7.30)$$

- **Force conservative** : (7.28) et (7.30)

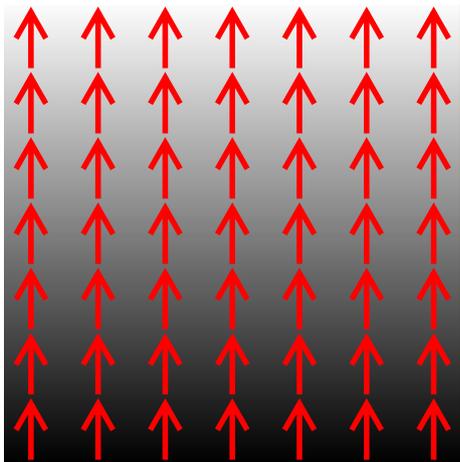
$$F_c^{\text{ext}} = - \frac{dV}{d\mathbf{r}} = - \nabla V \quad (7.31)$$

- **Force conservative** : opposée de la dérivée de l'énergie potentielle

$$\mathbf{F}_c^{\text{ext}} = - \frac{dV}{d\mathbf{r}} = - \nabla V \quad (7.31)$$

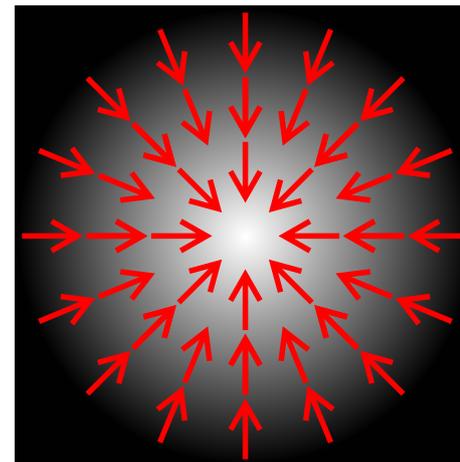
- **Interprétation graphique** : le gradient d'énergie potentielle ∇V représente la direction de plus grande pente de l'énergie potentielle V .
- **Equipotentiellles** : courbes (ou droites) d'énergie potentielle constante. Les équipotentiellles sont des courbes de "niveau" d'énergie potentielle.

① **Gradient linéaire** : V



- **Blanc** : V_{max}
- **Noir** : V_{min}

② **Gradient radial** : V

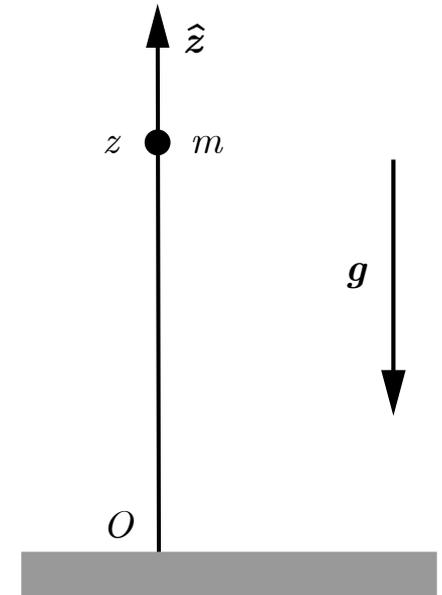


- **Blanc** : V_{max}
- **Noir** : V_{min}

1 Energie potentielle de pesanteur :

$$V_g(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.32)$$

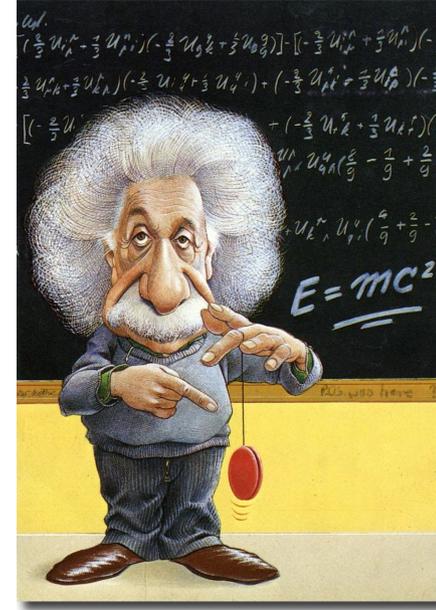
- Référence de potentiel : origine $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$
- Position : $\mathbf{r} = z \hat{\mathbf{z}}$
- Déplacement : $d\mathbf{r}' = dz' \hat{\mathbf{z}}$ (7.33)
- Champ gravitationnel : $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}$



$$V_g(z) = - \int_0^z m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}' = mg \int_0^z dz' = mgz \quad (7.34)$$

- Poids : (7.31) et (7.34)

$$\mathbf{P} = - \nabla V_g = - \frac{dV_g}{d\mathbf{r}} = - \frac{dV_g}{dz} \hat{\mathbf{z}} = -mg \hat{\mathbf{z}} = m \mathbf{g} \quad (7.35)$$

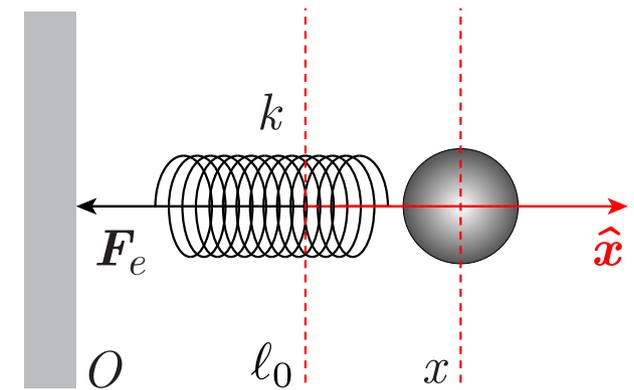


- Un yo-yo est lâché sans vitesse initiale. Son énergie potentielle de pesanteur V_g se transforme en énergie cinétique T durant sa chute et le processus inverse a lieu durant son ascension.
- En absence de frottement le mouvement du yo-yo serait périodique et l'énergie mécanique E constante. En réalité, à cause du frottement, il faut donner une petite impulsion périodique au fil pour entretenir le mouvement du yo-yo.

2 Energie potentielle élastique :

$$V_e(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k \mathbf{d} \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.36)$$

- Référence de potentiel : repos $\mathbf{r}_0 = \ell_0 \hat{\mathbf{x}}$
- Position : $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}}$
- Déformation : $\mathbf{d} = (x' - \ell_0) \hat{\mathbf{x}} \quad (7.37)$
- Déplacement : $d\mathbf{r}' = dx' \hat{\mathbf{x}}$



$$V_e(x) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k \mathbf{d} \cdot d\mathbf{r}' = k \int_{\ell_0}^x (x' - \ell_0) dx' = \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 \quad (7.38)$$

- Force élastique : (7.31) et (7.38)

$$\mathbf{F}_e = - \nabla V_e = - \frac{dV_e}{d\mathbf{r}} = - \frac{dV_e}{dx} \hat{\mathbf{x}} = -k(x - \ell_0) \hat{\mathbf{x}} = -k \mathbf{d} \quad (7.39)$$



- Le pendule de Wilberforce est constitué d'une masse suspendue à un ressort. Ce pendule est lâché sans vitesse initiale en élongation en dessous de sa position d'équilibre.
- Son énergie potentielle élastique V_e se transforme en énergie potentielle de pesanteur V_g et en énergie cinétique T de translation et de rotation lors de son ascension jusqu'à sa position de repos. Ensuite, les rôles de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle élastique V_e s'inversent jusqu'à ce qu'il atteigne sa hauteur maximale. Lors de sa chute, le phénomène inverse se produit.

7.2 Equilibre et stabilité

7.2.1 Position d'équilibre et stabilité

7.2.2 Stabilité du pendule mathématique

- On considère le mouvement d'un point matériel avec un seul degré de liberté en absence de force dissipative. Ainsi, s'il n'y a pas de mouvement de translation ou de rotation entretenu par une source d'énergie externe (moteur), l'énergie mécanique E est conservée.

- **Position d'équilibre** : vitesse nulle et énergie cinétique nulle

$$T = 0 \quad \text{ainsi} \quad E = V = \text{cste} \quad (\text{équilibre}) \quad (7.41)$$

- **Coordonnée généralisée** : position et angle

$$q \in \{x, y, z, r, \rho, \theta, \phi\} \quad \text{ainsi} \quad V \equiv V(q) \quad (7.42)$$

- **Coordonnée généralisée d'équilibre** : $q = q_0$

$$V(q_0) = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \left. \frac{dV}{dq} \right|_{q=q_0} = 0 \quad (\text{équilibre}) \quad (7.43)$$

- **Développement limité** : au 2^e ordre en q de $V(q)$ autour de $q = q_0$

$$V(q) = V(q_0) + \cancel{\left. \frac{dV}{dq} \right|_{q=q_0}} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \mathcal{O}(q^3) \quad (7.44)$$

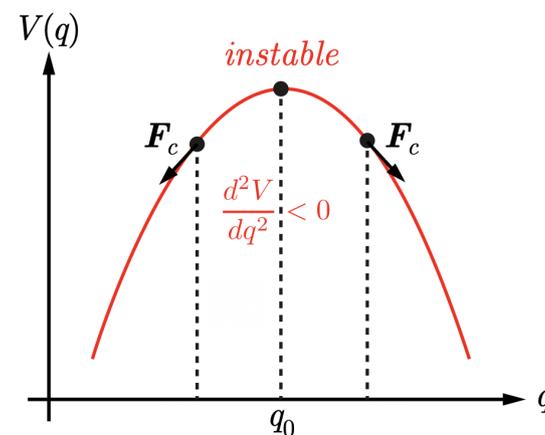
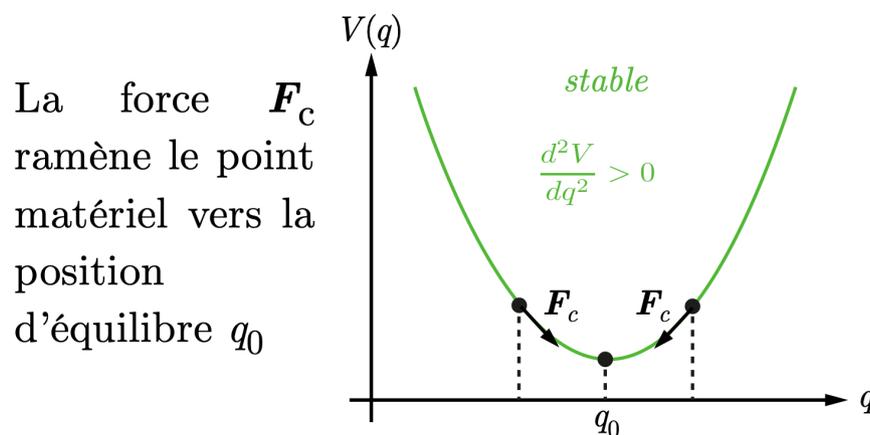
- **Energie potentielle :** (7.43) dans (7.44)

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \mathcal{O}(q^3) \quad (7.45)$$

- **Force conservative :**

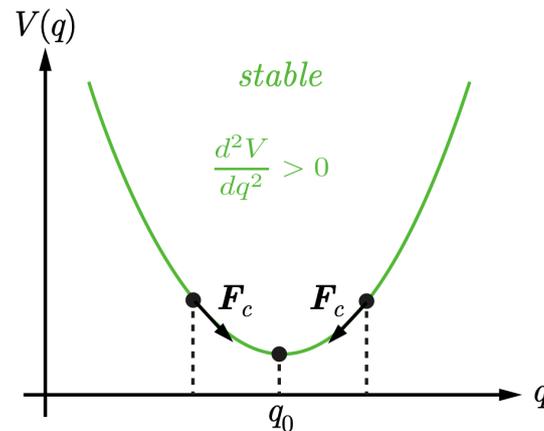
$$\mathbf{F}_c = -\nabla V = -\frac{dV}{dq} \hat{\mathbf{q}} \quad (7.33)$$

Au voisinage de la position d'équilibre $q = q_0$, l'énergie potentielle $V(q)$ est une fonction parabolique de la coordonnée généralisée q .

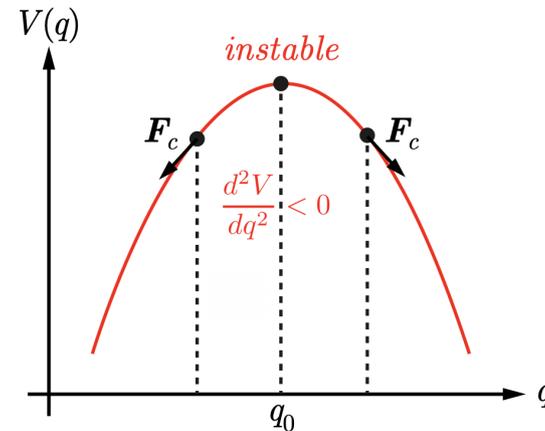


- Au voisinage de la position d'équilibre $q = q_0$, l'énergie potentielle $V(q)$ est une fonction parabolique de la coordonnée généralisée q .

La force F_c ramène le point matériel vers la position d'équilibre q_0



La force F_c éloigne le point matériel de la position d'équilibre q_0



- **Critère de stabilité** : signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle

① **Position d'équilibre stable** : $\left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0$

② **Position d'équilibre instable** : $\left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} < 0$

- **Coordonnée verticale :**

$$z(\phi) = \ell(1 - \cos \phi) \quad \text{où} \quad q \equiv \phi \quad (7.46)$$

- **Energie potentielle de pesanteur :**

$$V_g(\phi) = mgz(\phi) = mg\ell(1 - \cos \phi) \quad (7.47)$$

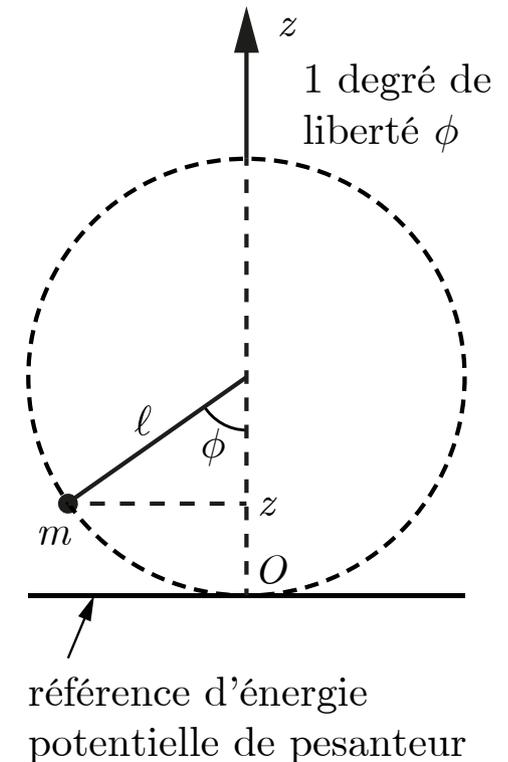
- **Condition d'équilibre :** $\phi = \phi_0$ (7.43)

$$\left. \frac{dV_g}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_0} = mg\ell \sin \phi_0 = 0$$

ainsi $\phi_0 \in \{0, \pi\}$ (7.48)

- **Dérivée seconde de l'énergie potentielle :**

$$\left. \frac{d^2V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = mg\ell \cos \phi_0 \quad (7.49)$$



- Dérivée seconde de l'énergie potentielle :

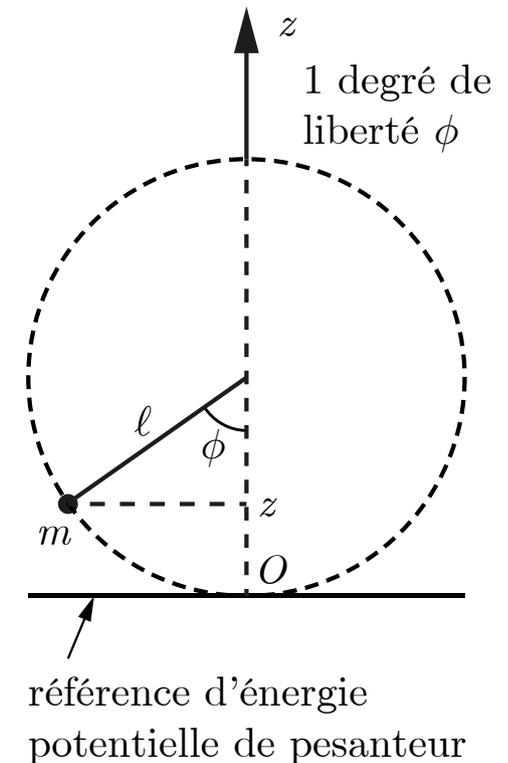
$$\left. \frac{d^2 V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = mgl \cos \phi_0 \quad (7.49)$$

- 1 Position d'équilibre inférieure : stable

$$\left. \frac{d^2 V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0=0} = mgl > 0 \quad (7.50)$$

- 2 Position d'équilibre supérieure : instable

$$\left. \frac{d^2 V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0=\pi} = -mgl < 0 \quad (7.51)$$



7.3 Résonance

7.3.1 Oscillateur harmonique forcé

7.3.2 Régimes transitoire et stationnaire

7.3.3 Réponse harmonique



- **Résonance acoustique** : en existant acoustiquement le trombone à certaines fréquences, on obtient une amplification du signal sonore appelée résonance acoustique.
- **Ondes stationnaires** : lors de la résonance acoustique, des ondes stationnaires se forment dans le trombone. La fréquence de résonance la plus basse s'appelle la fréquence fondamentale et les fréquences plus élevées qui sont des multiples de la fréquence fondamentale s'appellent des harmoniques.



- **Phénomène** : les parois latérales d'une cabine de douche réfléchissent les ondes sonores d'une voix humaine. A la fréquence de résonance de la cabine de douche, des ondes stationnaires s'établissent entre les parois latérales de la cabine de douche et la voix est amplifiée.
- **Fréquence de résonance** : à la résonance, la longueur d'onde des ondes stationnaires est $\lambda = 2L$, où $L = 1$ m est environ la largeur de la cabine de douche. La vitesse du son dans l'air est environ $v = 340$ m/s. Ainsi, la fréquence de résonance f est environ :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} = 170 \text{ Hz}$$



- 1 **Tiges** : on fait vibrer la tige verticale en faisant varier la fréquence d'excitation mécanique. On obtient une vibration des tiges horizontales. Plus la tige horizontale est courte plus sa fréquence de résonance sera élevée et vice versa.
- 2 **IRM** : en imagerie par résonance magnétique, les tiges sont remplacées par des vecteurs d'origine magnétique appelés "spins" qui se mettent à "vibrer" pour des fréquences d'excitation magnétique spécifiques. On peut ainsi identifier la nature et la densité des tissus biologiques.

- **Modèle mécanique** : le modèle mécanique le plus simple pour étudier la résonance est un oscillateur harmonique forcé (oscillateur harmonique amorti entraîné par une force d'entraînement périodique).
- **Forces extérieures** :

① **Poids** :

$$P = m g = m g \hat{X} \quad (7.52)$$

② **Force élastique** : longueur à vide ℓ_0

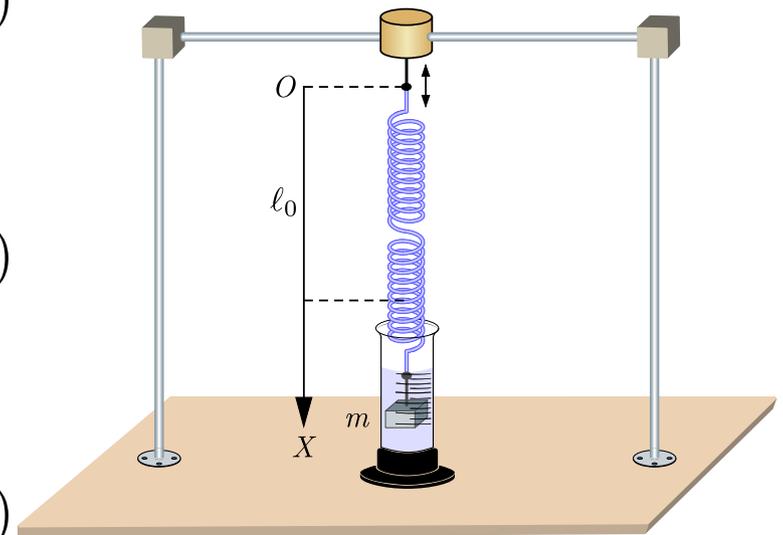
$$F_e = -k d = -k (X - \ell_0) \hat{X} \quad (7.53)$$

③ **Force de frottement visqueux** :

$$F_f = -b v = -b \dot{X} \hat{X} \quad (7.54)$$

④ **Force d'entraînement périodique** :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \hat{X} \quad (7.55)$$



- Accélération :

$$a = \ddot{X} \hat{X} \quad (7.56)$$

- Loi du mouvement :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}(t) = m \mathbf{a} \quad (7.57)$$

- Equation du mouvement :

$$\text{selon } \hat{X} : mg - k(X - \ell_0) - b\dot{X} + F_0 \sin(\omega t) = m\ddot{X} \quad (7.58)$$

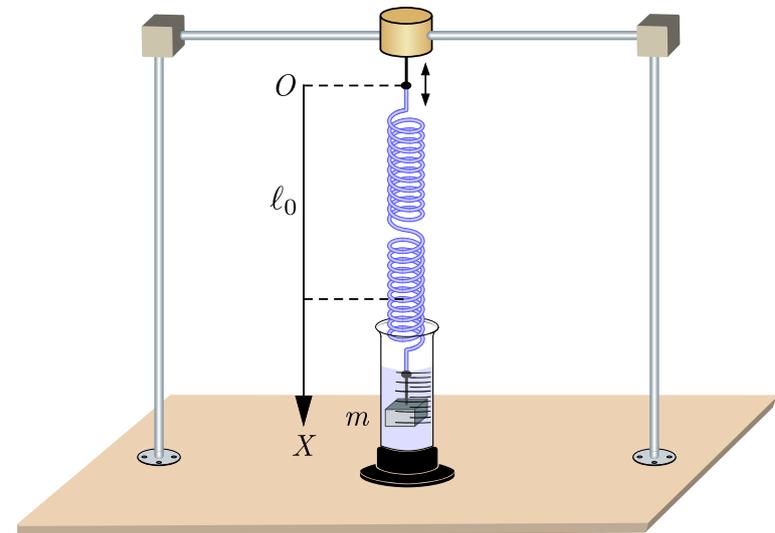
- Changement de variable :

$$x = X - \ell_0 - \frac{mg}{k} \quad (7.59)$$

$$\text{ainsi } \dot{x} = \dot{X} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \ddot{X}$$

- Equation du mouvement : (7.58)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (7.60)$$



- **Equation du mouvement** : oscillateur harmonique forcé

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (7.60)$$

- 1 **Pulsation** :

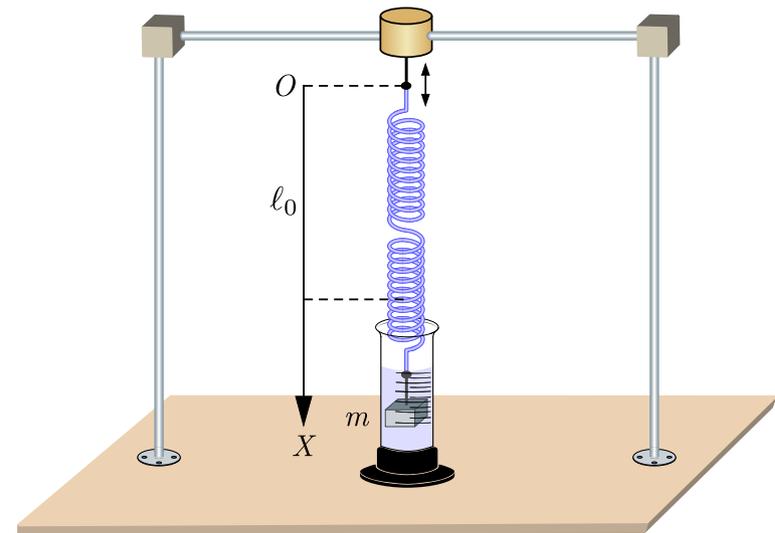
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.40)$$

- 2 **Temps d'amortissement** :

$$\tau = \frac{m}{b} \quad (3.22)$$

- 3 **Accélération d'entraînement** :

$$a_0 = \frac{F_0}{m} \quad (7.61)$$



- **Equation du mouvement** : oscillatoire harmonique amorti avec terme d'excitation périodique dans le membre de droite

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \quad (7.62)$$

- **Equation du mouvement** : oscillateur harmonique forcé

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \quad (7.62)$$

- **Condition initiale** : position

$$x(0) = 0 \quad (7.63)$$

- **Solution générale** : somme de la solution du système homogène et d'une solution particulière

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (7.64)$$

- **Solution du système homogène** : $a_0 = 0$ oscillateur amorti

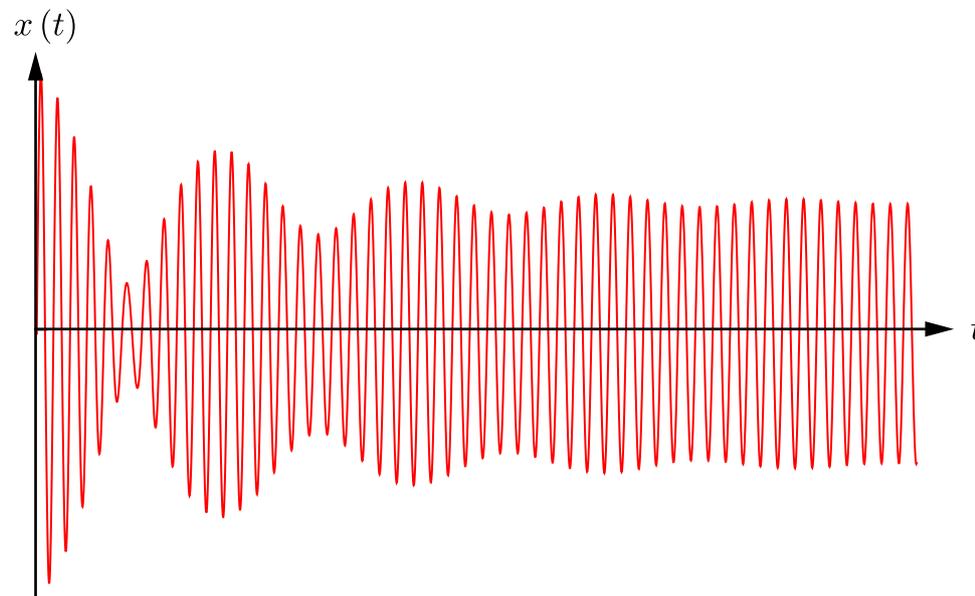
$$x_h(t) = \rho e^{-t/2\tau} \sin(\omega' t + \varphi') \quad (7.65)$$

- **Solution particulière** : oscillateur de pulsation ω et (7.63)

$$x_p(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.66)$$

- **Solution générale** : (7.65) et (7.66) dans (7.64) où (7.63) $\varphi' = -\varphi$

$$x(t) = \rho \left(e^{-t/2\tau} \sin(\omega' t - \varphi) + \sin(\omega t + \varphi) \right) \quad (7.67)$$



- ① **Régime transitoire** : échelle $t \sim \tau$: interférences et battements

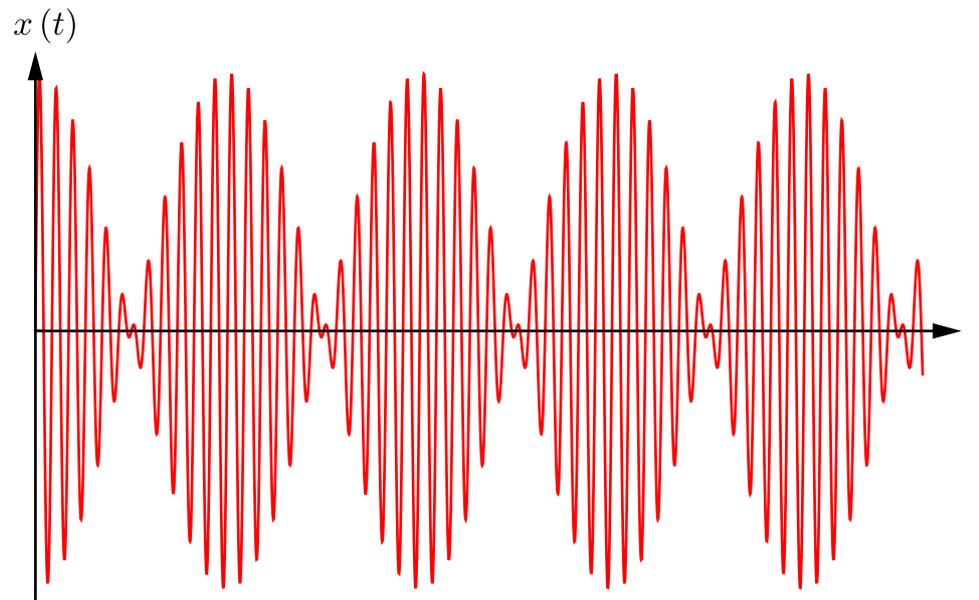
$$x(t) = \rho \left(e^{-t/2\tau} \sin(\omega' t - \varphi) + \sin(\omega t + \varphi) \right) \quad (7.67)$$

où l'enveloppe des oscillations propres est exponentiellement amortie.

- ② **Régime stationnaire** : échelle $t \gg \tau$: réponse harmonique

$$x(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.66)$$

et l'angle de déphasage φ est dû à la position initiale (7.63).



- **Frottements négligeables** : solution générale (7.67) avec $\tau \rightarrow \infty$

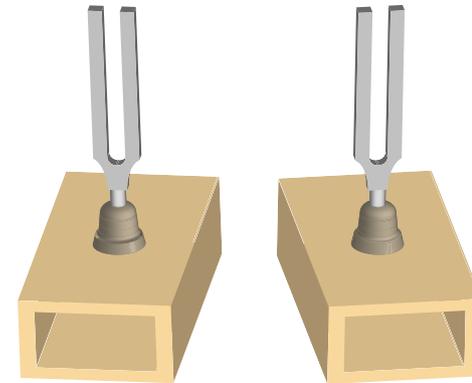
$$x(t) = \rho \left(\sin(\omega' t) + \sin(\omega t) \right) \quad \text{où} \quad \varphi = 0 \quad (7.68)$$

- **Identité trigonométrique** :

$$\sin(\omega' t) + \sin(\omega t) = 2 \sin\left(\frac{\omega t + \omega' t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - \omega' t}{2}\right) \quad (7.69)$$

- **Battements** : pulsations rapide $\omega + \omega'$ et lente $\omega - \omega'$

$$x(t) = 2\rho \sin\left(\frac{(\omega + \omega') t}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega - \omega') t}{2}\right) \quad (7.70)$$



- 1 **Battements** : en faisant vibrer deux diapasons de fréquences différentes $f = 440$ Hz et $f' = 435$ Hz, on entend un battement de fréquence $\Delta f = f - f' = 5$ Hz.
- 2 **Résonance** : en faisant vibrer un diapason de fréquence $f = 440$ Hz et en le mettant à côté d'un diapason de même fréquence, le second se met à alors vibrer grâce à la force d'excitation du premier.

- **Equation du mouvement** : régime stationnaire

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \quad (7.62)$$

- **Solution stationnaire** : conditions initiales et angle de déphasage φ quelconque

$$x(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.71)$$

- **Solution déphasée d'un quart de période** : $\omega t \rightarrow \omega t + \frac{\pi}{2}$

$$y(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.72)$$

- **Equation du mouvement** : en termes de $y(t)$

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \omega_0^2 y = a_0 \cos(\omega t) \quad (7.73)$$

- **Solution mathématique** : complexe

$$z(t) = y(t) + ix(t) \quad \text{ainsi} \quad \dot{z} = \dot{y} + i\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \ddot{y} + i\ddot{x} \quad (7.74)$$

- **Equation du mouvement** : régime stationnaire

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \quad (7.62)$$

- **Equation du mouvement** : en termes de $y(t)$

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \omega_0^2 y = a_0 \cos(\omega t) \quad (7.73)$$

- **Solution mathématique** : complexe

$$z(t) = y(t) + ix(t) \quad \text{ainsi} \quad \dot{z} = \dot{y} + i\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \ddot{y} + i\ddot{x} \quad (7.74)$$

- **Formule d'Euler** :

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

- **Equation du mouvement** : complexe (7.62) + i (7.73)

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = a_0 e^{i\omega t} \quad (7.75)$$

- **Solution stationnaire** : réelle

$$x(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.71)$$

- **Solution stationnaire** : réelle déphasée

$$y(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.72)$$

- **Solution mathématique** : complexe

$$z(t) = y(t) + ix(t) \quad (7.74)$$

- **Formule d'Euler** :

$$\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) = e^{i(\omega t + \varphi)} = e^{i\omega t} e^{i\varphi} \quad (7.76)$$

- **Solution mathématique** : complexe

$$z(t) = \rho (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) = \rho e^{i(\omega t + \varphi)} = \rho e^{i\omega t} e^{i\varphi} \quad (7.77)$$

- **Solution mathématique** : complexe remise en forme

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad \text{où} \quad z_0 = \rho e^{i\varphi} \quad (7.78)$$

- **Equation du mouvement** : complexe

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = a_0 e^{i\omega t} \quad (7.75)$$

- **Solution mathématique** : complexe

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad \text{où} \quad z_0 = \rho e^{i\varphi} \quad (7.78)$$

- **Equation du mouvement** : (7.78) dans (7.75)

$$\left(-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} + \omega_0^2\right) z_0 e^{i\omega t} = a_0 e^{i\omega t} \quad (7.79)$$

- **Amplitude** : complexe (7.79) divisé par $e^{i\omega t}$

$$z_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} = a_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (7.80)$$

- **Amplitude** : complexe

$$z_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} = a_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (7.80)$$

- **Amplitude** : réelle

$$\rho = |z_0| = a_0 \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad (7.81)$$

- **Déphasage** : entre l'excitation et la réponse harmonique

$$\tan \varphi = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \frac{\operatorname{Im}(\rho e^{i\varphi})}{\operatorname{Re}(\rho e^{i\varphi})} = \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{\operatorname{Re}(z_0)} = -\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.82)$$

- **Amplitude** : réelle comme fonction de la pulsation ω

$$\rho(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad (7.81)$$

- **Rapport des amplitudes** : fonction lorentzienne (7.83)

$$\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}}$$

- **Résonance** : maximum de la fonction lorentzienne (7.84) en $\omega = \omega_r$

$$\frac{d}{d(\omega/\omega_0)} \left(\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} \right) \Big|_{\omega=\omega_r} = \frac{2 \frac{\omega_r}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right) - \frac{\omega_r}{\omega_0} \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}{\left(\left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2} \right)^{3/2}} = 0$$

- **Résonance** : numérateur de (7.84) nul

$$2 \frac{\omega_r}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right) - \frac{\omega_r}{\omega_0} \frac{1}{(\omega_0 \tau)^2} = 0 \quad (7.85)$$

- **Résonance** : (7.85) multiplié par $-\omega_0^3/\omega_r$

$$2 (\omega_r^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{\tau^2} = 0 \quad (7.86)$$

- **Pulsation de résonance** :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} \quad (7.87)$$

- **Pulsation de résonance** : développement limité pour $\omega_0 \tau \gg 1$

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2(\omega_0 \tau)^2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4(\omega_0 \tau)^2} - \frac{1}{32(\omega_0 \tau)^4} \right) \quad (7.88)$$

- **Pulsation de résonance** : amortissement faible

$$\omega_r \simeq \omega_0 \quad (7.89)$$

- **Amplitude** : réelle comme fonction de la pulsation ω

$$\rho(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad (7.81)$$

- **Rapport des amplitudes** : fonction lorentzienne

$$\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}} \quad (7.83)$$

- 1 **Pulsation de résonance** : amortissement faible

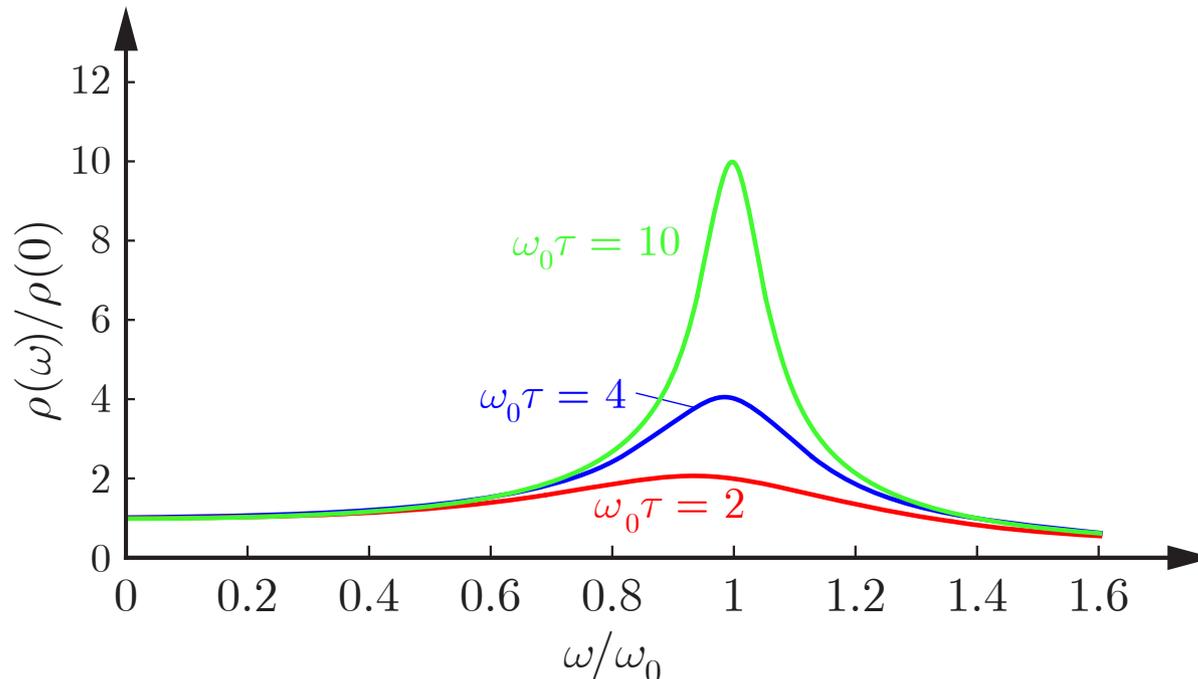
$$\omega_r \simeq \omega_0 \quad (\text{amortissement faible}) \quad (7.89)$$

- 2 **Résonance et viscosité** : pic proportionnel à l'inverse de la viscosité

$$\frac{\rho(\omega_r)}{\rho(0)} \simeq \frac{\rho(\omega_0)}{\rho(0)} = \omega_0\tau = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{m\omega_0}{k\eta} \quad (7.90)$$

- **Rapport des amplitudes** : fonction lorentzienne

$$\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}} \quad (7.83)$$



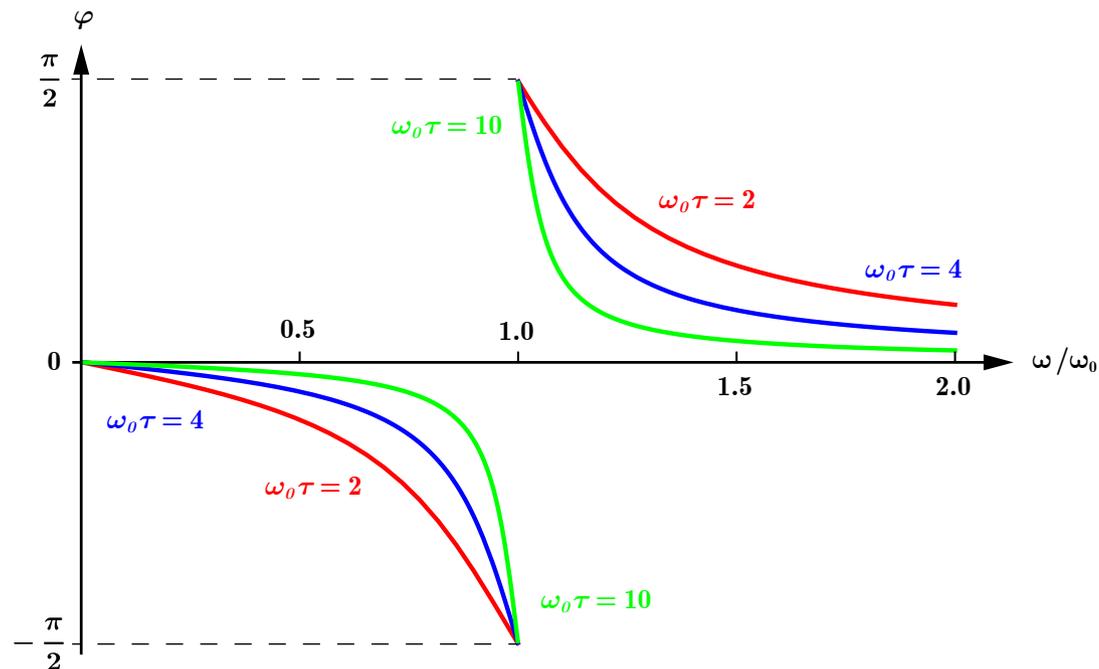
- **Résonance et viscosité** : plus la viscosité $\eta \propto \tau^{-1}$ du fluide (air, eau, etc...) est faible plus l'amplitude à la résonance est grande et vice versa.

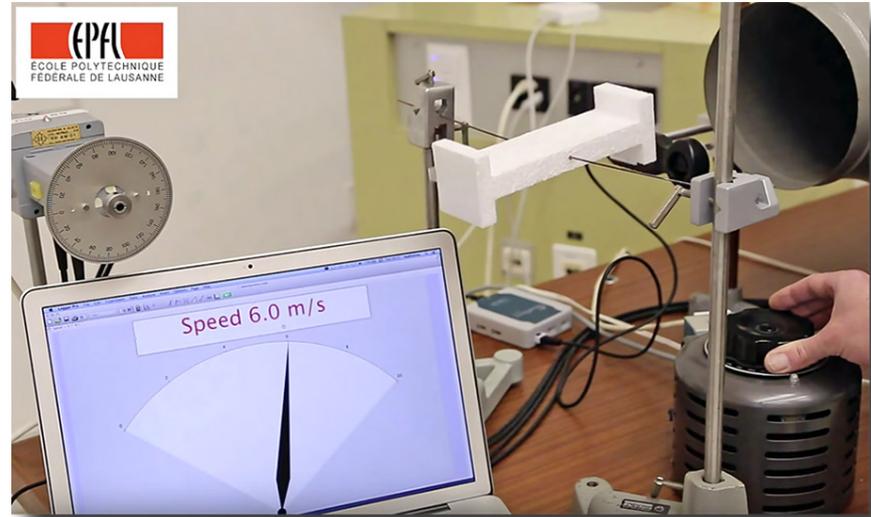
- **Angle de déphasage** : fonction de la pulsation ω inversion de (7.82)

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\frac{1}{\omega_0\tau}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \quad (7.91)$$

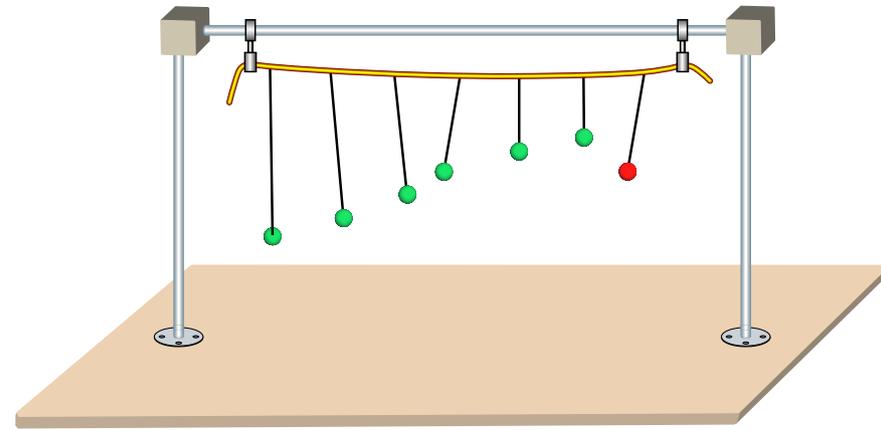
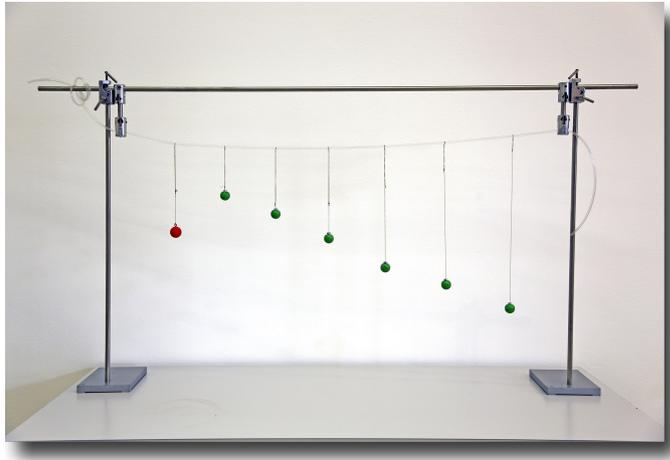
- **Limites** : angle de déphasage à la résonance

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad (7.92)$$





- 1 **Pont réel** : le pont de Tacoma s'est effondré en 1940 lorsqu'un vent fort a généré une résonance en torsion autour de l'axe horizontal central dont l'amplitude est devenue si grande que la structure n'a pas pu résister.
- 2 **Modèle réduit** : le pont est simulé par un élément en sagem fixé autour d'un axe métallique horizontal central. Le vent est généré par une soufflerie. En augmentant progressivement la vitesse du vent, on constate un pic de l'amplitude d'oscillation en torsion lorsqu'on s'approche de la résonance.



- En faisant osciller le premier pendule, les autres pendules se mettent aussi à osciller (régime transitoire). Après un certain temps, seulement le premier et le quatrième continuent à osciller et les autres deviennent quasiment immobiles (régime stationnaire).
- Le premier pendule (rouge) a la même longueur que le quatrième et donc la même pulsation parce que la pulsation d'un pendule dépend de sa longueur.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$



- Six métronomes de même fréquence d'oscillation oscillent sur une même plaque.
 - 1 Lorsque la plaque peut se déplacer latéralement, les métronomes se synchronisent car il y a un couplage mécanique entre les métronomes : chaque métronome joue le rôle de force d'entraînement pour les autres métronomes.
 - 2 Lorsque la plaque est maintenue immobile, les métronomes ne peuvent plus se synchroniser.



- 1 **Destruction d'un verre par résonance acoustique** : lorsque le verre est excité acoustiquement à l'aide d'un haut-parleur à sa fréquence de résonance, il est d'abord déformé, puis il se casse.
- 2 **Effet “Bianca Castafiore”** : la voix stridente de Bianca Castafiore (alias le rossignol milanais) avait pour fâcheuse tendance de briser les verres en cristal.